

# Итоги по проблеме Абрагама-Минковского и силе Абрагама

Юрий А. Спиричев

*Государственная корпорация по атомной энергии "Росатом". Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал федерального государственного унитарного предприятия федерального научно-производственного центра «Производственное объединение «Старт» имени М.В. Проценко»*

E-mail: [yuri.spirichev@mail.ru](mailto:yuri.spirichev@mail.ru)

## **Аннотация.**

Приведено решение проблемы Абрагама-Минковского. Показано, что импульс Минковского связан диэлектрическими характеристиками среды, а импульс Абрагама связан с магнитными характеристиками среды. Полный электромагнитный импульс в среде равен полусумме импульсов Минковского и Абрагама, а дискуссия о том, какая из этих форм электромагнитного импульса правильна, не имеет смысла. Показано, что только несимметричный тензор энергии-импульса описывает полный электромагнитный импульс в среде. Рассмотрена сила Абрагама в диэлектрической и проводящей среде. Показано, что сила Абрагама не передает механический импульс среде, т.е. является фиктивной силой реально несуществующей и обнаружить ее экспериментально невозможно.

**Ключевые слова:** проблема Абрагама-Минковского, сила Абрагама, тензор энергии-импульса, электромагнитный импульс.

## **Содержание**

### **1. Введение**

### **2. Электромагнитный импульс в диэлектрической среде**

### **3. Электромагнитный импульс в проводящей среде**

### **4. Сила Абрагама в диэлектрической и проводящей средах**

### **5. Заключение**

## **Литература**

### **1. Введение**

Проблема взаимодействия электромагнитного поля с веществом обсуждается десятки лет и известна как проблема Абрагама-Минковского. Она состоит из двух вопросов. Главным вопросом и связанных с ним дискуссий является форма представления электромагнитного импульса в среде. Вторым вопросом является электромагнитная сила Абрагама и ее физическая реальность. Для диэлектрической среды известны две формы электромагнитного импульса: форма Минковского и форма Абрагама. В работах [1 - 42] приводятся теоретические аргументы в пользу той или иной формы импульса. С целью определения какая

из форм импульса больше соответствует реальности, в работах [43 - 62] приводятся описания экспериментов, анализ их результатов и предлагаются методики новых экспериментов.

Электромагнитный импульс неразрывно связан с тензором энергии-импульса (ТЭИ) и является его составной частью. Из ТЭИ следуют уравнения сохранения импульса. В связи с этим кроме ТЭИ Минковского были построены различные формы ТЭИ с целью описания электромагнитного импульса в среде, из которых наиболее известен симметричный ТЭИ Абрагама [63]. Известны также ТЭИ Герца – Хэвисайда, Гельмгольца - Абрагама, Абрагама – Бриллюэна – Питаевского, Полевого – Рытова, Белинфанте-Розенфельда и др. [64 - 71]. Однако, методы построения этих тензоров являлись феноменологическими и не отличались математической корректностью. В работе [72] из тензоров электромагнитного поля и электромагнитной индукции математически строго получен ТЭИ взаимодействия электромагнитного поля с диэлектрической средой.

Другим важным вопросом в проблеме Абрагама-Минковского является сила Абрагама, которая определяется в виде разности производных по времени от импульсов Минковского и Абрагама. Во многих перечисленных работах обсуждается вопрос ее физической реальности. Поставлены эксперименты по ее обнаружению, классическим из которых считается эксперимент Лахоза-Уокера [44, 45], и предлагаются новые эксперименты. Последний обзор экспериментальных работ приведен в [40]. Проблема обнаружения и измерения силы Абрагама усугублялась тем, что в электродинамике отсутствовало ее корректное уравнение. В работе [62] это уравнение было получено. Его анализ в работе [42] показал, что сила Абрагама в диэлектрической среде с потерями является реактивной вихревой силой и не зависит от потерь в среде. Однако полного анализа электромагнитного импульса в среде и силы Абрагама с учетом последних результатов до настоящего времени не сделано.

Целью настоящей работы является рассмотрение электромагнитного импульса и силы Абрагама в диэлектрической и проводящей средах и подведение итогов по проблеме Абрагама-Минковского.

## 2. Электромагнитный импульс в диэлектрической среде

Плотность электромагнитного импульса является компонентой ТЭИ. Канонический ТЭИ запишем в общем виде [73]:

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} W & i \frac{1}{c} \mathbf{S} \\ ic \cdot \mathbf{g} & t_{ik} \end{bmatrix} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3; i, k = 1, 2, 3) \quad (1)$$

где  $W$  – плотность энергии;

$\mathbf{S}$  – плотность потока энергии (вектор Пойнтинга);

$\mathbf{g}$  – плотность импульса;

$t_{ik}$  – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

Для диэлектрической среды компоненты ТЭИ, полученного в работе [72] имеют вид:

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} & \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{D} \times \mathbf{V} & t_{ik} &= E_i D_k + B_i H_k - 3\delta_{ik} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{H}). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  – соответственно, напряженность электрического поля и электрическая индукция;  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{V}$  – соответственно, напряженность магнитного поля и магнитная индукция. Плотность электромагнитного импульса в форме Минковского имеет вид  $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{V}$ . Плотность электромагнитного импульса в форме Абрагама имеет вид  $\mathbf{g}^A = \mathbf{S}/c^2 = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$ . Целью дискуссий по форме электромагнитного импульса являлось выяснение, какая из них более правильно описывает электромагнитный импульс в среде.

Рассмотрим различия этих двух форм электромагнитного импульса. Зоммерфельд А. [74] разделил электромагнитные величины на силовые и количественные. К силовым величинам он отнес напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и индукцию магнитного поля  $\mathbf{V}$ . К количественным величинам он отнес электрическую индукцию  $\mathbf{D}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Связь между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$  определяется материальными уравнениями. Для слабого электромагнитного поля в изотропной неферромагнитной диэлектрической среде без дисперсии обычно принимают материальные уравнения в виде  $\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$  и  $\mathbf{H} = \mathbf{V}/\mu \cdot \mu_0$ , где  $\varepsilon$  и  $\mu$ , соответственно, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Электрическая индукция  $\mathbf{D}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  соответственно, зависят от электрических и магнитных характеристик среды. Тогда плотность электромагнитного импульса Минковского  $\mathbf{g}^M = \mathbf{D} \times \mathbf{V}$ , в которую входит электрическая индукция  $\mathbf{D}$ , описывает часть электромагнитного импульса, связанную с электрическими характеристиками среды. Плотность электромагнитного импульса Абрагама  $\mathbf{g}^A = \mathbf{E} \times \mathbf{H}/c^2$ , в которую входит магнитная индукция  $\mathbf{H}$ , описывает часть электромагнитного импульса, связанную с магнитными характеристиками среды. Из этого следует, что каждая из этих форм описывает только часть полного электромагнитного импульса, и дискуссия о том, какая из этих частей более правильная, не имеет смысла, поскольку они обе правильные.

После такого вывода возникает вопрос, какая из форм ТЭИ является правильной? Все известные формы ТЭИ можно разделить на несимметричные и симметричные. Из несимметричного ТЭИ следует два различных уравнения сохранения для плотности импульса, так как его дивергенции по каждому из индексов различны. Из симметричного ТЭИ следует одно уравнение сохранения для плотности импульса, так как его дивергенции по каждому из индексов одинаковы. Рассмотрим уравнения сохранения для плотности электромагнитного импульса в форме Минковского. Запишем их для диэлектрической среды с потерями,

развернув уравнения [42]  $\partial^\mu T_{\mu\nu}^E = \partial^\mu T_{\mu\nu}^M$  и  $\partial^\nu T_{\mu\nu}^E = \partial^\nu T_{\mu\nu}^M$ , где  $T_{\mu\nu}^E$  - тензор электромагнитной энергии-импульса,  $T_{\mu\nu}^M$  - тензор механической энергии-импульса:

$$\partial_t \mathbf{g}^M - \partial_k t_{ik} = \partial_t \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{S} - \partial_i t_{ik} = \partial_t \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \text{ или } \partial_t \mathbf{g}^A - \partial_i t_{ik} = \partial_t \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \quad (3)$$

где  $\mathbf{p}$  – плотность механического импульса;  $\mathbf{V}$  – скорость движения единичного объема среды. Из этих уравнений следует вывод о том, что несимметричный ТЭИ описывает электромагнитный импульс в форме Минковского (уравнение (2)) и в форме Абрагама (уравнение (3)). Таким образом, несимметричный ТЭИ описывает обе части электромагнитного импульса в среде.

Рассмотрим уравнения сохранения для плотности электромагнитного импульса в форме Абрагама:

$$\partial_t \mathbf{g}^A - \partial_k t_{ik} = \partial_t \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{S} - \partial_i t_{ik} = \partial_t \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \text{ или } \partial_t \mathbf{g}^A - \partial_i t_{ik} = \partial_t \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})$$

Из этих уравнений следует, что симметричный ТЭИ описывает электромагнитный импульс только в форме Абрагама. Т.е. в нем описание электромагнитного импульса является неполным, поскольку отсутствует часть электромагнитного импульса, связанная с диэлектрическими характеристиками среды. Таким образом, правильным ТЭИ является несимметричный ТЭИ, полностью описывающий электромагнитный импульс в среде.

Поскольку уравнения сохранения импульса (2) и (3) для единичного объема среды выполняются одновременно, то сложив их, получим уравнение сохранения для полной плотности импульса в этом объеме среды:

$$\partial_t (\mathbf{g}^M + \mathbf{g}^A) / 2 - (\partial_k t_{ik} + \partial_i t_{ik}) / 2 = \partial_t \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \quad (4)$$

Из этого уравнения следует, что плотность полного электромагнитного импульса в диэлектрической среде равна полусумме плотности импульсов Минковского и Абрагама.

### 3. Электромагнитный импульс в проводящей среде

Рассмотрим электромагнитный импульс в проводящей среде. Среду будем рассматривать для микрополя как плотность свободных электрических зарядов в вакууме. Электромагнитное поле будем описывать с помощью электромагнитного потенциала  $\mathbf{A}_\mu(\varphi/c, i \cdot \mathbf{A})$ , где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  - скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля в евклидовом пространстве, а заряды и токи в виде четырехмерного вектора плотности тока  $\mathbf{J}_\nu(c \cdot \rho, i \cdot \mathbf{J})$ , где  $\rho$  и  $\mathbf{J}$  - плотность зарядов и вектор плотности тока проводимости.

ТЭИ взаимодействия электромагнитного поля с зарядами и токами  $T_{\mu\nu}^E$  получим в виде тензорного произведения четырехмерного векторного потенциала электромагнитного поля  $A_\mu$  на четырехмерную плотность тока  $J_\nu$ :

$$T_{\mu\nu}^E = A_\mu \otimes J_\nu = \begin{pmatrix} \rho \cdot \varphi & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_x & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_y & \frac{1}{c} i \cdot \varphi \cdot J_z \\ i \cdot c \cdot \rho \cdot A_x & -A_x \cdot J_x & -A_x \cdot J_y & -A_x \cdot J_z \\ i \cdot c \cdot \rho \cdot A_y & -A_y \cdot J_x & -A_y \cdot J_y & -A_y \cdot J_z \\ i \cdot c \cdot \rho \cdot A_z & -A_z \cdot J_x & -A_z \cdot J_y & -A_z \cdot J_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} W & \frac{1}{c} i \cdot \mathbf{S} \\ i \cdot c \cdot \mathbf{p} & t_{ik} \end{bmatrix} \quad (5)$$

где  $W = \rho \cdot \varphi$  - плотность полной электромагнитной энергии,  $\mathbf{g} = \rho \cdot \mathbf{A}$  - плотность электромагнитного импульса;  $\mathbf{S} = \varphi \cdot \mathbf{J}$  - плотность потока электромагнитной энергии;  $t_{ik} = -\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k$  - трехмерный тензор плотности потока электромагнитного импульса или тензор напряжений. ТЭИ (5) является несимметричным и соответствует каноническому тензору энергии-импульса (1). Запишем уравнения сохранения в виде равенства четырехмерных дивергенций тензоров энергии-импульса  $T_{\mu\nu}^E$  и  $T_{\mu\nu}^M$ :

$$\partial_\mu T_{\mu\nu}^E = \partial_\mu T_{\mu\nu}^M \quad \text{и} \quad \partial_\nu T_{\mu\nu}^E = \partial_\nu T_{\mu\nu}^M$$

Запишем два уравнения сохранения для плотности электромагнитного импульса в развернутом виде:

$$\partial_i(\rho \cdot \mathbf{A}) + \partial_k(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k) = \partial_i \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_i(\varphi \cdot \mathbf{J}) + \partial_i(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k) = \partial_i \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) аналогичны уравнениям (2) и (3). В них также стоят два вида электромагнитного импульса,  $\mathbf{g} = \rho \cdot \mathbf{A}$  и  $\mathbf{g} = \varphi \cdot \mathbf{J} / c^2$ . Найдем плотность полного электромагнитного импульса в виде суммы уравнений (6) и (7):

$$\partial_i(\rho \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \varphi \cdot \mathbf{J}) / 2 + (\partial_k(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k) + \partial_i(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k)) / 2 = \partial_i \mathbf{p} + \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}) \quad (8)$$

Здесь плотность полного электромагнитного импульса как и в уравнении (4) равна полусумме плотности двух видов электромагнитного импульса.

#### 4. Сила Абрагама в диэлектрической и проводящей средах

Уравнения сохранения плотности импульса (2), (3), (6) и (7) можно рассматривать как уравнения баланса плотности электромагнитных и механических сил в среде.

Рассмотрим силу Абрагама в диэлектрической среде с потерями. Она выражается в виде разности производных по времени от импульсов Минковского и Абрагама. Для ее получения найдем разность уравнений (2) и (3):

$$\partial_i \mathbf{g}^M - \partial_i \mathbf{g}^A - \partial_k t_{ik} + \partial_i t_{ik} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{F}_A = \partial_t \mathbf{g}^M - \partial_t \mathbf{g}^A = \partial_k t_{ik} - \partial_i t_{ik} \quad (9)$$

Расписав правую часть уравнения, получим:

$$\mathbf{F}_A = \partial_t(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \partial_t(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c^2 = \nabla \times (\mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{B} \times \mathbf{H}) \quad (10)$$

Из уравнений (2), (3) и (4) следует, что производные по времени отдельных частей плотности электромагнитного импульса и плотности полного электромагнитного импульса изменяют плотность механического импульса среды (при наличии потерь в среде). Из уравнений (9) и (10) следует, что разность производных по времени отдельных частей плотности электромагнитного импульса не изменяет плотности ее механического импульса. Таким образом, сила Абрагама, описываемая уравнением (9), не оказывает механического действия на среду, т.е. она является фиктивной силой и обнаружить ее экспериментально невозможно.

Теперь рассмотрим силу Абрагама для проводящей среды. Для этого случая она также выражается в виде разности производных по времени от двух форм электромагнитных импульсов  $\mathbf{g} = \rho \cdot \mathbf{A}$  и  $\mathbf{g} = \varphi \cdot \mathbf{J}/c^2$ . Для ее получения найдем разность уравнений (6) и (7):

$$\partial_t(\rho \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \partial_t(\varphi \cdot \mathbf{J}) + \partial_k(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k) - \partial_i(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k) = 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_A = \partial_t(\rho \cdot \mathbf{A}) - \partial_t(\varphi \cdot \mathbf{J})/c^2 = \partial_i(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k) - \partial_k(\mathbf{A}_i \otimes \mathbf{J}_k) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J})$$

Из уравнений (6), (7) и (8) следует, что производные по времени отдельных частей плотности электромагнитного импульса и плотности полного электромагнитного импульса изменяют плотность механического импульса среды. Из уравнения (11) следует, что разность производных по времени отдельных частей плотности электромагнитного импульса не изменяет плотности ее механического импульса. Таким образом, и для проводящей среды сила Абрагама, описываемая уравнением (11), не оказывает на нее механического действия, т.е. она является фиктивной силой и обнаружить ее экспериментально невозможно.

Рассмотрим причину фиктивности силы Абрагама на примере проводящей среды (для диэлектрической среды результат аналогичен). Для этого в уравнениях (6) и (7) найдем дивергенции трехмерных тензоров напряжений и запишем их в развернутом виде:

$$\partial_m(\mathbf{A}_m \otimes \mathbf{J}_n) = \mathbf{J}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{J} \quad \text{и} \quad \partial_n(\mathbf{A}_m \otimes \mathbf{J}_n) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{J}) + (\mathbf{J} \cdot \nabla)\mathbf{A} \quad (12)$$

Применим к последним членам этих выражений известное векторное тождество:

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} = \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{b})]$$

Запишем их в развернутом виде и получим выражения:

$$\partial_m(\mathbf{A}_m \otimes \mathbf{J}_n) = \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) - \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{J})] \quad (13)$$

$$\partial_n(\mathbf{A}_m \otimes \mathbf{J}_n) = \frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J}) - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{J} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{J})] \quad (14)$$

В каждом из этих выражений содержится сила Абрагама  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{J})$ , но с разными знаками. Поэтому в уравнении для плотности полного электромагнитного импульса (8), получаемого сложением уравнений (6) и (7), сила Абрагама сокращается:

$$\partial_t (\rho \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \varphi \cdot \mathbf{J}) / 2 + \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) - \mathbf{J} \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{J}) = \partial_t \mathbf{p} + \nabla (\mathbf{p} \cdot \mathbf{V})$$

Таким образом, реально силы Абрагама в природе не существует и попытки ее экспериментального обнаружения можно прекратить.

## 5 Заключение

По результатам последних работ по проблеме Абрагама-Минковского можно сделать вывод о том, что импульс Минковского и импульс Абрагама являются составными частями полного электромагнитного импульса в среде. Импульс Минковского связан с диэлектрическими характеристиками среды, а импульс Абрагама связан с магнитными характеристиками среды. Полный электромагнитный импульс в диэлектрической среде равен полусумме импульсов Минковского и Абрагама. В связи с этим дискуссия о том, который из них более правильно описывает электромагнитный импульс в среде, не имеет смысла. Сила Абрагама не изменяет механический импульс среды, поэтому она является фиктивной силой и не может быть обнаружена экспериментально. Таким образом, проблема Абрагама-Минковского решена.

## Литература

1. I. Brevk Mat. Phys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **37** 11 1 (1970)
2. I. Brevk Mat. Phys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **37** 13 1 (1970)
3. Д.В. Скобельцын *УФН* **110** 253 (1973); D.V. Skobel'tsyn Sov. Phys. Usp. **16** 381 (1973)
4. В.Л. Гинзбург *УФН* **110** 309 (1973); V.L. Ginzburg Sov. Phys. Usp. **16** 434 (1973)
5. A. Ashkin, J.M. Dziedzic, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 19
6. В.Л. Гинзбург, В.А. Угаров *УФН* **118** 175 (1976); V.L. Ginzburg, V.A. Ugarov Sov. Phys. Usp. **19** 94 (1976)].
7. I. Brevk Phys. Rep. **52** 133 (1979)
8. R.N. Pfeifer, T.A. Nieminen, N.R. Heckenberg, H. Rubinsztein-Dunlop, Rev. Modern Phys. **79** (2007) 1197.
9. E.A. Hinds, S.M. Barnett, Phys. Rev. Lett. 102 (2009) 050403.
10. В.Г. Веселаго *УФН* **179** 689 (2009); V.G. Veselago Phys. Usp. **52** 649 (2009)
11. В.П. Макаров, А.А. Рухадзе *УФН* **179** 995 (2009); V.P. Makarov, A.A. Rukhadze Phys. Usp. **52** 937 (2009)

12. S.M. Barnett, R. Loudon, *Phil. Trans. R. Soc. A* 368 (2010) 927.
13. C. Baxter, R. Loudon, *J. Modern Opt.* 57 (2010) 830.
14. S.M. Barnett, *Phys. Rev.* 104 (2010) 070401.
15. M. Mansuripur, *Opt. Commun.* 283 (2010) 1997.
16. P.W. Milonni, R.W. Boyd, *Adv. Opt. Photonics* 2 (2010) 519.
17. В.Г. Веселаго, В.В. Щавлев *УФН* **180** 331 (2010); V.G. Veselago, V.V. Shchavlev *Phys. Usp.* **53** 317 (2010)
18. М.В Давидович *УФН* **180** 623 (2010); M.V. Davidovich *Phys. Usp.* **53** 595 (2010)
19. В.Г. Веселаго *УФН* **181** 1201 (2011); V.G. Veselago *Phys. Usp.* **54** 1161 (2011)
20. B.A. Kemp, *J. Appl. Phys.* 109 (2011) 111101.
21. G.L.J.A. Rikken, B.A. van Tiggelen, *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011) 170401.
22. [10] D.J. Griffiths, *Amer. J. Phys.* 80 (2012) 7.
23. M. Testa, *Ann. Phys. (NY)* 336 (2013) 1.
24. N.S. Aanensen, S.E. Ellingsen, I. Brevik, *Phys. Scr.* 87 (2013) 055402.
25. M. Mansuripur, A.R. Zakharian, E.M. Wright, *Phys. Rev. A* 88 (2013) 023826.
26. U. Leonhardt, *Phys. Rev. A* 90 (2014) 033801.
27. S.M. Barnett, R. Loudon, *New J. Phys.* 17 (2015) 063027.
28. [16] L. Zhang, W. She, N. Peng, U. Leonhardt, *New J. Phys.* 17 (2015) 053035.
29. B.A. Kemp, *Progr. Opt.* 60 (2015) 437.
30. Choi H, Park M, Elliott D S, Oh K, *Optomechanical Measurement of the Abraham Force in an Adiabatic Liquid Core Optical Fiber Waveguide*, arXiv: 1501.05225.
31. C.J. Sheppard, B.A. Kemp, *Phys. Rev. A* 93 (2016) 053832.
32. S. Wang, J. Ng, M. Xiao, C.T. Chan, *Sci. Adv.* 2 (2016) e1501485.
33. И.Н. Топтыгин, К. Левина *УФН* **186** 146 (2016); I.N. Toptygin, K. Levina *Phys. Usp.* **59** 141 (2016)
34. Mario G. Silveirinha, *Revisiting the Abraham-Minkowski Dilemma*, arXiv: 1702.05919.
35. Michael E. Crenshaw, *The Role of Conservation Principles in the Abraham--Minkowski Controversy*, arXiv: 1604.01801.
36. C. Wang, *Is the Abraham electromagnetic force physical?* *Optik*, (2016) 127, 2887–2889.
37. Pablo L. Saldanha, J. S. Oliveira Filho, *Hidden momentum and the Abraham-Minkowski debate*, arXiv: 1610.05785.
38. Massimo Testa, *A Comparison between Abraham and Minkowski Momenta*, *Journal of Modern Physics*, 2016, 7, 320-328.
39. Joseph J. Bisognano, *Electromagnetic Momentum in a Dielectric: a Back to Basics Analysis of the Minkowski-Abraham Debate*, arXiv: 1701.08683.



40. Brevik, *Minkowski momentum resulting from a vacuum–medium mapping procedure, and a brief review of Minkowski momentum experiments*, *Annals of Physics* 377 (2017) 10–21.
41. Rodrigo Medina and J. Stephany, *The energy-momentum tensor of electromagnetic fields in matter*, arXiv:1703.02109.
42. Yurii A. Spirichev, *Electromagnetic energy, momentum and forces in a dielectric medium with losses*, arXiv: 1705.08447.
43. A. Ashkin, J.M. Dziedzic, *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 19.
44. G.B. Walker, D.G. Lahoz, G. Walker, *Can. J. Phys.* 53 (1975) 2577.
45. G.B. Walker, D.G. Lahoz, *Nature (London)* 253 (1975) 339.
46. R.V. Jones, B. Leslie, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 360 (1978) 347.
47. A.F. Gibson, M.F. Kimmitt, A.O. Koochian, D.E. Evans, G.F.D. Levy, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 370 (1980) 303.
48. I. Brevik, *Phys. Rev.* B33 (1986) 1058.
49. R.V. Jones, *Instruments and Experiences*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
50. A. Casner, J.P. Delville, *Phys. Rev. Lett.* 90 (2003) 144503.
51. G.K. Campbell, A.E. Leanhardt, J. Mun, M. Boyd, E.W. Streed, W. Ketterle, D.E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 170403.
52. W. She, J. Yu, R. Feng, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 243601.
53. M. Mansuripur, *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009) 019301.
54. I. Brevik, *Phys. Rev. Lett.* 103 (2009) 219301.
55. I. Brevik, S.E. Ellingsen, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 063830.
56. I. Brevik, S.E. Ellingsen, *Ann. Phys.* 326 (2011) 754.
57. R. Wunenburger, B. Issenmann, E. Brasselet, C. Loussert, V. Houstane, J.P. Delville, *J. Fluid Mech.* 666 (2011) 273.
58. N.S. Aanensen, S.E. Ellingsen, I. Brevik, *Phys. Scr.* **87** (2013) 055402.
59. I. Brevik, *Trans. Roy. Norw. Soc. Sci. Lett.* (3) (2014) 83. arXiv: 1310.3684 [quant-ph].
60. N.G.C. Astrath, L.C. Malacarne, M.L. Baesso, G.V.B. Lukasiewicz, S.E. Bialkowski, *Nature Commun.* **5** (2014) 4363.
61. L. Zhang, W. She, N. Peng, U. Leonhardt, *New J. Phys.* 17 (2015) 053035.
62. Yurii A. Spirichev, *Equation for the Abraham force in non-conducting medium and methods for its measurement*, arXiv: 1704.03368.
63. M. Abragam, *Be.Circ. mat. Palermo* **28**, 1 (1909); **31**, 527 (1910).
64. Л.П. Питаевский, *ЖЭТФ*, **39** 450 (1960); L.P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* 12 1008 (1961).
65. В.Г. Полевой, С.М. Рытов, *УФН* 125 549 (1978); V.G. Polevoi, S.M. Rytov, *Phys. Usp.* **21** 630 (1978).
66. I. Brevik, *Phys. Rep.* **52** (1979) 133.

67. Yu. N. Obukhov *Ann. Phys.* **17** 9/10 830 (2008).
68. В.П. Макаров, А.А. Рухадзе *УФН* **181** 1357 (2011); V.P. Makarov, A.A. Rukhadze, *Phys. Usp.* **54** 1285 (2011).
69. Tomras Ramos, Guillermo F. Rubilar and Yuri N. Obukhov, *First principles approach to the Abraham-Minkowski controversy for the momentum of light in general linear non-dispersive media*, arXiv: 1310.0518.
70. V.V. Nesterenko, A.V. Nesterenko, *J. Math. Phys.* **57** (2016) 032901.
71. V.V. Nesterenko, A.V. Nesterenko, *J. Math. Phys.* **57** (2016) 092902.
72. Yurii A. Spirichev, *A new form of the energy-momentum tensor of the interaction of an electromagnetic field with a non-conducting medium. The wave equations. The electromagnetic forces*, arXiv: 1704.03815.
73. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press, 1983).
74. A. Zommerfeld, *Electrodinamix*, (M.: 1958).